

## 下巻・「第8 すみつの法・桶に升積次第」

### はじめに

今回は、円錐台の形の容器（桶）の容積ですね。数学では、円錐などの錐形の体積は「底面の面積×高さ÷3」の公式で求めてきました。江戸時代にはこの公式が成立するのか、それとも新たな定数が出てくるのかがポイントです。どのようにして求めたのかを読み解いていきます。

### 1. 原本提示



石四斗七升八合一勺入法二二尺  
二寸左右二置かくれハ一寸ノま  
四百八十四有又底壹尺八寸左右  
二置かくれハ三百廿四と成二口  
合八百超ハツ有是二ツニして  
四百四ツと成別に置上口底ノ  
寸合四尺有是二ツニして二尺  
と成左右二置かくれハ一寸ま  
四百と成右別二置四百四ツ  
内引ハ四ツノすみつ有法三二  
われハ一三三三三と成是へ引  
たる四百を加へ四百超一三三  
三三と成是へふかさ三尺かく  
れハ一寸ノ丸坪壹万式千超八十  
と成是へ円法七九かくれハ一  
寸ノ坪九千五百十一と成是へ  
今升ノ法十五五四をかく

成 勺 合 升 斗 石 れ 八 壹  
也 一 八 七 四 壹

読下し文になおしましょう。



一石四斗七升八合一勺入る。法に二尺二寸左右に置きかくれば、一寸のま四百八十四有り。また底一尺八寸左右に置きかくれば、三百二十四と成り、二口合わせて八百超えて八つ有る。これ二つにして四百四つと成る。別に置く。上口・底の寸合わせて四尺有る。これ二つにして二尺と成り、左右に置きかくれば、一寸ま四百と成る。右別に置く。四百四つ内引きは四つのすみつ有り。法三にわれれば、一三三三三と成る。是へ引きたる四百を加え、四百超えて一三三三三と成る。これへ深さ三尺かくれば一寸の丸坪一万二千超えて八十と成る。これへ円法七九かくれば、一寸の坪九千五百十一と成る。これへ今升の法十五五四をかく

五五四  
を かく  
れ ば、一  
石 四 斗  
七 升 八  
合 一 勺  
と 成 る  
也。

現代語訳です。

口の直径が二尺二寸、底の直径が一尺八寸、深さが三尺の桶があります。この桶の容積はどれだけですか。

答は一石四斗七升八合一勺です。

まず口の直径の二尺二寸どうしをかける  
と一寸のまは四百八十四あります。また底  
の直径の一尺八寸どうしをかけると三百二  
十四です。この二つを足すと八百八となり  
これを二で割ると四百四となります。口と  
底の直径を合わせると四尺で、これを二で  
割ると二尺です。これをかけ合わせると、  
一寸のまは四百です。四百四から四百を引  
くと四のすみつとなります。

これを法三で割ると一・三三三三となり、  
これに引いた四百を加えて、四百一・三三  
三三となります。これに深さ三尺をかける  
と一寸の丸坪一万二千八十となります。こ  
れに円法七・九をかけると一寸の坪九千五  
百一十一・六です。これに今升の法十五・五  
四をかけると、一石四斗七升八合一勺とな  
ります。

原文には問が書かれていませんでしたので、現代語訳のように問をつくりました。あ  
らためてここに書き出します。

口の直径が2尺2寸、底の直径が1尺8寸、深さが3尺の桶があります。この桶の  
容積はどれだけですか。

問は、これで間違いはないと思います。答えは、

1石4斗7升8合1勺です。

## 2. 解くぞ！

口の直径の2尺2寸どうしをかけると1寸の  
まは484あります。また底の直径の1尺8  
寸どうしをかけると324です。この2つを  
足すと808となり、これを2で割ると40  
4となります。

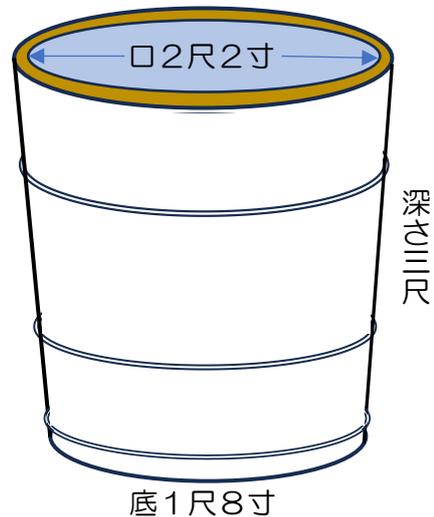
口と底との一辺どうしを、それぞれかけ合して  
います。

$$22 \times 22 = 484$$

$$18 \times 18 = 324$$

これは、口と底それぞれの直径を一辺とする正方形の面積を求めていますね。そして、  
それぞれを合わせて2で割っています。

$$(484 + 324) \div 2 = 808 \div 2 \\ = 404$$



これで、この桶の口と底それぞれの直径を一辺とする正方形の面積が求められたことになります。

次です。

口と底の直径を合わせると4尺で、これを2で割ると2尺です。これをかけ合わせると、1寸のまは400です。404から400を引くと4のすみつとなります。

口と底の直径を合わせて2で割るので、直径の平均が求められます。それをかけ合わせるので、その正方形の面積が求められました。それが、

$$2 \cdot 2 + 1 \cdot 8 = 4$$

$$4 \div 2 = 2$$

$$2 \times 2 = 4 \text{ (尺}^2\text{)} = 400 \text{ (寸}^2\text{)}$$

ですね。

前ページの桶の口と底それぞれの直径を一辺とする正方形の面積から、桶の平均の直径を一辺とする正方形の面積をひいています。

$$404 - 400 = 4$$

これが「すみつ（済統）」だと言うのです。

そして、

これを法3で割ると1.3333となり、これに引いた400を加えて、401.3333となります。

「法3で割る」とありますが、この「法3」こそ「すみつの法3」なんです。

### 円柱や四角柱の体積：円錐や四角錐の体積＝3：1

の関係なので、「すみつの法3」とは、○柱の体積から○錐の体積を求める時の定数のことです。だから、誤差の4をこのすみつの法3で割ると、四角柱から四角錐の体積の誤差が求められるのです。

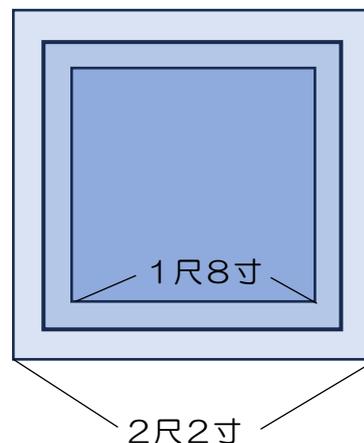
$$4 \div 3 = 1.3333 \dots$$

$$\div 1.3333$$

$$\begin{aligned} \text{桶の平均の直径を一辺とする正方形の面積} + 1.3333 &= 400 + 1.3333 \\ &= 401.3333 \end{aligned}$$

これが、求める立体（正四角柱）の平面積です。

これに深さ3尺をかけると1寸の丸坪12080となります。これに円法7.9をかけると1寸の坪9511.6です。これに今升の法15.54をかけると、1石4斗7升8合1勺となります。



平面積に深さをかけるので、正四角柱の体積が求められます。

$$\begin{aligned} 401.3333 \times 30 &= 12039.999 \\ &\div 12040 \end{aligned}$$

おっと、本文の「12080」ではありませんなあ。田原嘉明の計算ミスか。「12080」でまいります。

元の立体は桶（円錐台）なので、正四角柱の体積に、「円方0.79」をかけます。

$$12080 \times 0.79 = 9543.2$$

おっと、今度は本文の「9511.6」にならない。やはり「12040」でまいりましょうか。

$$12040 \times 0.79 = 9511.6$$

やはり、「12040」が正しい。

これが体積なので、これに、「今升の法15.54」をかけます。

$$\begin{aligned} 9511.6 \times 15.54 &= 147810.264 \\ &\div 147810 \\ &= 1石4斗7升8合1勺 \end{aligned}$$

と求められました。